第２講　微分・積分

1　原点 O(0, 0) を中心とする半径 1 の円を C_1，点 B(−1, 0) を中心とする半径 1 の円を C_2 とする．点 P は点 A(1, 0) を出発して，一定の速さで反時計回りに円 C_1 上を半周して点 B で停止する．一方，点 Q は点 D(−2, 0) を点 P と同時に出発して，点 P の速さの 2 倍の速さで時計回りに円 C_2 上を 1 周して停止する．

(1)　$\angle AOP=\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき，点 P と点 Q の座標をそれぞれ θ を用いて表せ．

(2)　$t=\cos\theta$ とする．PQ^2 を t を用いて表せ．

(3)　PQ^2 を最小にする t の値と，PQ^2 の最小値を求めよ．

[2]　xy 平面上に，放物線 $C_1：y=x^2$ と点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ $(q>p^2)$ があり，P を通り傾きが t の直線を l とする．さらに，C_1 と l との 2 つの交点を結ぶ線分の中点において，放物線 $C_2：y=-x^2+ax+b$ が l と接している．次の問いに答えよ．

(1)　a，b を求めよ．

(2)　C_1 と C_2 で囲まれる領域の面積を求めよ．

(3)　t が実数全体を動くとき，(2)で求めた面積の最小値を求めよ．

3　p を実数とする．関数 $y=x^3+px^2+x$ のグラフ C_1 と関数 $y=x^2$ のグラフ C_2 は，$x>0$ の範囲に共有点を2個もつとする．

(1)　このような p の値の範囲を求めよ．

(2)　C_1 と C_2 の $x>0$ の範囲にある共有点の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とし，$0\leqq x\leqq\alpha$ と $\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で C_1 と C_2 が囲む部分の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．$S_1=S_2$ となるような p の値を求めよ．また，このときの S_1 の値を求めよ．

第２講　微分・積分

1 (1)　OP＝1，∠AOP＝θ より，点 P の座標は $(1\cdot\cos\theta,\ 1\cdot\sin\theta)$　つまり

$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$

BQ＝1，∠DBQ＝2θ より，点 Q の座標は $(-1+1\cdot\cos(\pi-2\theta),\ 1\cdot\sin(\pi-2\theta))$

つまり $Q(-1-\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$

(2)　$PQ^2=(-1-\cos 2\theta-\cos\theta)^2+(\sin 2\theta-\sin\theta)^2$

$=(-2\cos^2\theta-\cos\theta)^2+(2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta)^2$

$=(-\cos\theta)^2(2\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta(2\cos\theta-1)^2$

$=\cos^2\theta(2\cos\theta+1)^2+(1-\cos^2\theta)(2\cos\theta-1)^2$

$t=\cos\theta$ とすると

$PQ^2=t^2(2t+1)^2+(1-t^2)(2t-1)^2$

$=t^2\{(2t+1)^2-(2t-1)^2\}+(2t-1)^2=t^2\cdot 8t+4t^2-4t+1=8t^3+4t^2-4t+1$

(3)　$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ つまり $-1\leqq t\leqq 1$

$f(t)=8t^3+4t^2-4t+1$ とおくと，$f'(t)=24t^2+8t-4=4(6t^2+2t-1)$

$6t^2+2t-1=0$ とすると $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{6}$

よって，$f(t)$ の増減表は下図.

t	-1	…	$\frac{-1-\sqrt{7}}{6}$	…	$\frac{-1+\sqrt{7}}{6}$	…	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	↗		↘		↗	

ここで，$f(t)=(6t^2+2t-1)\left(\dfrac{4}{3}t+\dfrac{2}{9}\right)-\dfrac{28}{9}t+\dfrac{11}{9}$ より

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right)=-\frac{28}{9}\cdot\frac{-1+\sqrt{7}}{6}+\frac{11}{9}=\frac{47-14\sqrt{7}}{27}<1$$

よって，$t=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$ のとき PQ^2 は最小値 $\dfrac{47-14\sqrt{7}}{27}$ をとる.

2 (1)　点 $P(p,\ q)$ を通り，傾きが t の直線 l の方程式は

$y=t(x-p)+q$　つまり $y=tx-pt+q$

$q>p^2$ より放物線 C_1：$y=x^2$ と直線 l は異なる 2 点で交わり，その 2 つの交点の x 座標は，x の 2 次方程式

$x^2=tx-pt+q$　つまり $x^2-tx+pt-q=0$ の 2 解.

この 2 解を x_1，x_2 $(x_1<x_2)$ とすると，解と係数の関係より

$x_1+x_2=t$

よって，2 つの交点を結ぶ線分の中点の x 座標は $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{t}{2}$

またこの中点において，放物線 C_2：$y=-x^2+ax+b$ と直線 l が接するので，

x の２次方程式 $-x^2+ax+b=tx-pt+q$ つまり $x^2+(t-a)x+(-pt+q-b)=0$

が $x=\dfrac{t}{2}$ を重解にもつ.

したがって，等式 $x^2+(t-a)x+(-pt+q-b)=\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2$ が成立する.

x の係数および定数項を比較して，$t-a=-t$，$-pt+q-b=\dfrac{t^2}{4}$

したがって，$a=2t$，$b=-\dfrac{t^2}{4}-pt+q$

(2)　C_1 と C_2 の２つの交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，α，β は x の２次方程式

$x^2=-x^2+ax+b$　つまり $2x^2-ax-b=0$ の２解.

よって，解と係数の関係および(1)の結果より

$$\alpha+\beta=\frac{a}{2}=t,\ \alpha\beta=-\frac{b}{2}=\frac{t^2}{8}+\frac{pt}{2}-\frac{q}{2}$$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=t^2-\left(\frac{t^2}{2}+2pt-2q\right)=\frac{t^2}{2}-2pt+2q$$

よって，C_1 と C_2 で囲まれた領域の面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+ax+b)-x^2\}dx=\int_\alpha^\beta(-2x^2+ax+b)dx$$

$$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{1}{3}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\left(\frac{t^2}{2}-2pt+2q\right)^{\frac{3}{2}}$$

(3)　$\dfrac{t^2}{2}-2pt+2q=\dfrac{1}{2}(t-2p)^2-2p^2+2q$ より，t が実数全体を動くとき，S は最小値

$\dfrac{1}{3}(-2p^2+2q)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(q-p^2)^{\frac{3}{2}}$ をとる.

3 (1)　C_1 と C_2 の共有点の x 座標は，x の方程式

$x^3+px^2+x=x^2$　つまり $x\{x^2+(p-1)x+1\}=0$ の解.

共有点のうち，$x>0$ にあるものは x の２次方程式 $x^2+(p-1)x+1=0$ の２解.

この２解を α，β とすると，$\alpha>0$ かつ $\beta>0$ となるのは，

判別式 $D>0$ かつ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$ のとき

$D>0$ より $(p-1)^2-4>0$　　$(p+1)(p-3)>0$　　よって $p<-1$，$3<p$

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=1-p>0$　よって $p<1$　　$\alpha\beta=1>0$

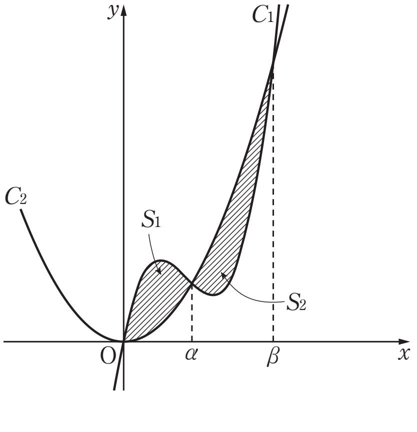
よって，求める p の値の範囲は $p<-1$

(2)　C_1，C_2 のグラフの概形は右図.

$f(x)=x^3+px^2+x$，$g(x)=x^2$ とすると，

$S_1=S_2$ より

$$\int_0^\alpha\{f(x)-g(x)\}dx=\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}dx$$



$$\int_0^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx=0$$

$$\int_0^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx=0$$

よって(1)より

$$\int_0^{\beta}\{x^3+(p-1)x^2+x\}\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{p-1}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right]_0^{\beta}=\frac{\beta^4}{4}+\frac{p-1}{3}\beta^3+\frac{\beta^2}{2}=0$$

$\beta>0$ より $\dfrac{\beta^2}{4}+\dfrac{p-1}{3}\beta+\dfrac{1}{2}=0$

また β は $x^2+(p-1)x+1=0$ の解より，$\beta^2+(p-1)\beta+1=0$　つまり

$(p-1)\beta=-\beta^2-1$

よって $\dfrac{\beta^2}{4}+\dfrac{-\beta^2-1}{3}+\dfrac{1}{2}=0$　　$\beta^2=2$　　ゆえに $\beta=\sqrt{2}\,(>0)$

このとき $\sqrt{2}\,(p-1)=-3$ より，求める p の値は $p=1-\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{2-3\sqrt{2}}{2}$

また，$\alpha\beta=1$ より $\alpha=\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって

$$S_1=\int_0^{\alpha}\{x^3+(p-1)x^2+x\}\,dx=\frac{\alpha^4}{4}+\frac{p-1}{3}\alpha^3+\frac{\alpha^2}{2}=\alpha^2\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{p-1}{3}\alpha+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$$